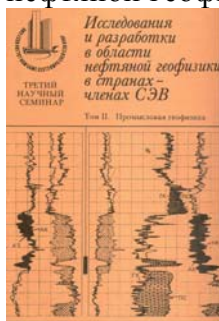


Материал взят с сайта www.mmell.narod.ru

Б.Еникеев МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГОРНЫХ ПОРОД (МОДЕЛЬ РЕШЕТКИ КАПИЛЛЯРОВ). Москва 1988 СЭВ. Сборник докладов III научного семинара стран - членов СЭВ по нефтяной геофизике *Том II Промысловая геофизика* стр.310-316.



реферат

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГОРНЫХ ПОРОД (МОДЕЛЬ РЕШЕТКИ КАПИЛЛЯРОВ) **Б.Еникеев** (СССР)

Представления о горных породах как решетках капилляров появились в петрофизике, занимающейся построением уравнений взаимосвязи между коллекторскими и физическими свойствами, почти синхронно с представлениями о них как об укладках частиц, и сейчас их роль при описании таких физических свойств пород, как проницаемость, фазовая проницаемость, остаточная водонасыщенность, удельное электрическое сопротивление, диффузионно-адсорбционная активность, возрастает. Ниже рассмотрен ряд результатов расчета эффективных физических свойств решеток капилляров.

Модели одиночного капилляра. Первые результаты были получены при моделировании свойств решетки при помощи модели, в которой предполагалось, что все капилляры данной решетки одинаковы и, следовательно (в силу симметрии), свойства ее сводятся к свойствам одного единственного капилляра.

Модели решетки с распределенным радиусом

Модели теории перколяции и эффективной среды

Физические свойства решетки капилляров

Приводится обзор ряда моделей в гидрогеологии (Чайлдс, Коллис-Джордж, Муалем, Маршалл, Миллингтон и Квирк) и физике известных к тому времени и рассматриваются способы их адаптации к задачам петрофизики

Частично материал вошел в книгу Элланского и Еникеева о построении и использовании многомерных петрофизических взаимосвязей.

Москва 1988 СЭВ. Сборник докладов III научного семинара стран - членов СЭВ по нефтяной геофизике *Том II Промысловая геофизика* стр.310-316.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГОРНЫХ ПОРОД (МОДЕЛЬ РЕШЕТКИ КАПИЛЛЯРОВ)

Б. Еникеев (СССР)

Представления о горных породах как решетках капилляров появились в петрофизике, занимающейся построением уравнений взаимосвязи между коллекторскими и физическими свойствами, почти синхронно с представлениями о них как об укладках частиц, и сейчас их роль при описании таких физических свойств пород, как проницаемость, фазовая проницаемость, остаточная водонасыщенность, удельное электрическое сопротивление, диффузионно-адсорбционная активность, возрастает [1,5]. Ниже рассмотрен ряд результатов расчета эффективных физических свойств решеток капилляров.

1. Модели одиночного капилляра. Первые результаты были получены при моделировании свойств решетки при помощи модели, в которой предполагалось, что все капилляры данной решетки одинаковы и, следовательно (в силу симметрии), свойства ее сводятся к свойствам одного единственного капилляра, имеющего длину l , радиус r и пленку глин толщиной δ , равномерно распределенную во внутренней поверхности капилляра. Для такой модели легко рассчитывать ряд свойств, например объем капилляра V , его площадь поперечного сечения S_{\perp} , площадь боковой поверхности S_{\parallel} , пористость $K_{\text{п}}$, глинистость $K_{\text{гл}}$, долю неэффективных пор $(K_{\text{пгп}} \cdot K_{\text{гл}}) / K_{\text{п}}$,

$$V = S_{\perp} \cdot l, S_{\perp} = \pi a \cdot b, S_{\parallel} = 4 a E(\epsilon) = L \cdot l,$$

где L — периметр; a и b — главные полуоси эллипса, образующего капилляр; $\epsilon = (1 - (b/a)^2)^{1/2}$;

$$E(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} (1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi.$$

Для $(b/a) > 2$ $E(\epsilon)$ с достаточной для наших целей точностью вычисляется по первым трем членам разложения $E(\epsilon)$ в окрестности нуля $E(\epsilon) = \pi [1 - 0,25 \cdot \epsilon - (3/16) \epsilon^2 - \dots] \cdot 0,5$.

В этом случае расход Q через трубу эллиптического сечения находится как $Q = \frac{\pi a^3 b^3}{4 a^2 + b^2} \cdot \frac{\text{grad } P}{\mu}$.

Расход через глины мы считаем при этом нулевым.

Сопротивление капилляра R выражается через площади (S) и сопротивления ρ глин ($S_{\text{гл}}, \rho_{\text{гл}}$) и свободных пор ($S_{\perp}, \rho_{\text{в}}$).

$$R = \left(\frac{S_{\text{гл}}}{\rho_{\text{гл}}} + \frac{S_{\perp}}{\rho_{\text{в}}} \right)^{-1} = \frac{\rho_{\text{в}}}{S_{\perp}} \left[1 + \left(\frac{S_{\text{гл}}}{S_{\perp}} \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{гл}}} \right)^{-1} \right]. \quad (1)$$

Для капилляров с малой глинистостью можно считать, что

$$S_{\text{гл}} \cdot l \cdot \delta = n K_{\text{гл}}, S_{\perp} l = V = n (K_{\text{п}} - K_{\text{пгп}} K_{\text{гл}}) = n K_{\text{п}} \text{эфф},$$

где n характеризует число капилляров в единичном объеме порового пространства.

Диффузионно-адсорбционные потенциалы $E_{\text{ДА}}$ можно также вычислить по схеме расчета (М.Р. Вилли, 1956) параллельно включенных ЭДС в глинах и эффективных порах:

$$E_{\text{ДА}} = E_{\text{ДАгл}} f + E_{\text{Д}} (1 - f), \alpha_{\text{сн}} = f = S_{\text{гл}} \cdot R / \rho_{\text{гл}}, \quad (2)$$

где $E_{\text{ДА гл}}$ и $E_{\text{Д}}$ — диффузионно-адсорбционные потенциалы в глинах и в свободных порах.

Для одиночного капилляра можно найти и содержание остаточной воды $K_{\text{во}}$. Помимо глин, в которых содержится $K_{\text{пгл}}$ · $K_{\text{гл}}$ связанной воды, часть ее будет приурочена к пленке на стенках пор, т.е. пропорциональна S_{11} . Иначе говоря, $K_{\text{во}} \cdot K_{\text{пэфф}} = K_{\text{пгл}} K_{\text{гл}} + S_{11} \cdot n$.

В случае, когда поры имеют иную форму, некоторые уравнения модифицируются. Для частного случая, когда капилляр является прямым круговым цилиндром, в котором остаточная вода обволакивает стенки пор, удается получить [4] даже формулы для расчета относительных проницаемостей, имеющие вид

$$K_{\text{пр в}}^{\text{отн}} = \left(\frac{K_{\text{в}} - K_{\text{во}}}{1 - K_{\text{во}}} \right)^2; \quad (3)$$

$$K_{\text{пр н}}^{\text{отн}} = \left(\frac{1 - K_{\text{в}}}{1 - K_{\text{во}}} \right)^2 + 2 \frac{\mu_{\text{н}}}{\mu_{\text{в}}} \frac{(K_{\text{в}} - K_{\text{во}})(1 - K_{\text{во}})}{(1 - K_{\text{во}})^2}.$$

Получаемые с помощью такой простейшей модели пористой среды расчетные соотношения выглядят достаточно просто, но при расчете свойств сцементированных горных пород они, как правило, дают результаты, систематически сильно отличающиеся от измеренных в лаборатории, в первую очередь из-за того, что они не учитывают перетоков между капиллярами, обусловленных различием их размеров.

2. Оценка свойств решетки с распределенными радиусами капилляров. Далее мы предполагаем, что капилляры моделируются прямыми круговыми цилиндрами с разными радиусами. В рамках таких моделей сопротивление и проницаемость зависят от способа соединения капилляров.

С учетом известного соотношения $Q = K_{\text{пр}} \frac{\text{grad } P}{\mu}$ получаем

$$\frac{A K_{\text{пэфф}}}{3.8} \left(\int_0^{\infty} \frac{f(r) dr}{r^4} \right)^{-1} \leq K_{\text{пр}} \leq \frac{A K_{\text{пэфф}}}{3.8} \left(\int_0^{\infty} r^4 f(r) dr \right), \quad (4)$$

где $A = \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr$; множитель $\frac{1}{3}$ обусловлен условием изотропии пористой среды. Левая часть неравенства (4) отвечает последовательному, а правая — параллельному соединению капилляров. Сходные неравенства можно написать и для фазовых проницаемостей. К сожалению, вилка, образуемая этими границами, для достаточно "широкого" распределения $f(r)$ очень велика. Поэтому для задачи расчета $K_{\text{пр}}$ и аналогично $\rho_{\text{п}}$ был предложен ряд приближенных способов. Один из наиболее простых

и конструктивных из них разрабатывался рядом исследователей, в том числе Чайлдсом и Коллис-Джоджем, Миллингтоном и Квирком, Т. Маршаллом, и продолжает привлекать исследователей и в настоящее время. Согласно этому подходу предполагается, что пористая среда представляется в виде блоков, в каждом из которых размеры пор распределены независимо. Поэтому при стыковке пор их радиус меняется в точке стыковки случайно в соответствии с распределением пор по их радиусам. Все поры разбиваются на заданное заранее число классов, отличающихся по размерам. Поскольку мы предполагаем, что поры стыкуются друг с другом случайно, то площадь поры, имеющей с одной стороны стыка радиус ρ , а с другой — радиус σ , будет равна $S_{\rho\sigma}$. Распределение $S_{\rho\sigma}$ находится из выражения $S_{\rho\sigma} = \pi^2 (F(\rho) \delta\rho) (F(\sigma) \delta\sigma)$, где F — плотность распределения пор по размерам, нормируемая из условия $\int_0^{R^*} f(r) dr = K_{\text{пэфф}}$; R^* — наибольший размер пор в сечении. В предположении, что сопротивление пор контролируется сопротивлением меньшей из них, приходим к уравнению

$$K_{\text{пр}}(R^*) = M \sum_{a=0}^{R^*} \sum_{\tau=0}^{R^*} \tau^2 F(a) F(\tau) \delta a \delta \tau. \quad (5)$$

В уравнении (5) при $a < \tau$ τ^2 заменяется на a^2 , величина M — нормировочная постоянная. Уравнение (5) может быть записано и в интегральной форме, введенной Муалемом,

$$K_{\text{пр}}(R^*) = M \left[\int_0^{R^*} \int_0^a \tau^2 F(a) F(\tau) da d\tau + \int_0^{R^*} \int_0^a a^2 F(a) F(\tau) da d\tau \right]. \quad (6)$$

Одно из наиболее распространенных и компактных уравнений этого типа — уравнение Маршалла, имеющее более обозримый вид

$$K_{\text{пр}}(i_0) = \frac{1}{8} \frac{K_{\text{п}}^2}{N^2} \sum_{j=i_0}^N (2 \cdot j + 1 - 2 \cdot i_0) r_j^2.$$

При выводе этого уравнения предполагается, что поры имеют N типов, упорядоченных по радиусу, i_0 — номер последнего класса пор, заполненных несмачивающей фазой, коэффициент β Маршалл рекомендует задавать равным 2 (Миллингтон и Квирк полагают $\beta = \frac{4}{3}$). Рассмотренный подход к учету перетоков между капиллярами с точки зрения теории является недостаточно обоснованным по сравнению с аппаратом теории эффективной среды и перколяции, развитым в последние десятилетия.

3. Теория перколяции и уравнения эффективной среды. Эта теория возникла из простой вероятностной задачи о просачивании по связям (узлам), т.е. о передаче сигнала из одной точки решетки на бесконечное расстояние по ней в том случае, когда каждое из ребер (узлов) решетки с заданной вероятностью P пропускает или же с вероятностью $(1 - P)$ не пропускает сигнал. Основные интересные для наших целей результаты относятся к задаче о просачивании по связям и сводятся к следующим. Если решетка характеризуется случайной величиной z_i (z_i — координационное число, равное числу капилляров, сходящихся в i -м узле), то для нее существует некое критическое значение вероятности P , равное P_c , такое, что при $P \leq P_c$ просачивание отсутствует, а при $P \geq P_c$ нарастает (для $(P - P_c) \leq 0,2$) как степень разности $(P - P_c)$.

Для целого ряда регулярных решеток с разной размерностью получены методом Монте-Карло и аналитически числовые значения, которые сведены в таблицу. Оказалось, что сведенные в таблицу значения P_c , z и d связаны с неожиданно высокой точностью соотношением $z \cdot P_c = \frac{d}{d-1}$.

Тип решетки	z	P_c	zP_c	d
Шестиугольная	3	0,6527	1,96	2
Квадратная	4	0,5	2,0	2
Треугольная	6	0,3473	2,08	2
Алмазная	4	0,388	1,55	2
Кубическая	6	0,247	1,48	3
Объемноцентрическая	8	0,178	1,42	3
Гранецентрическая	12	0,119	1,43	3

Для задач расчета сопротивления удалось численно оценить показатель степени μ в уравнении для эффективного сопротивления $R \sim (P - P_c)^\mu$. Оценки μ (полученные разными методами) варьируют от 1,1 до 1,43 ($d = 2$) и 1,6–1,75 ($d = 3$). Более точные (неасимптотические) результаты, пригодные во всей области изменения $(P - P_c)$, удалось получить лишь для частных схем построения пористых сред (деревьев Бете, или же схем ветвящейся пористой среды).

Так, для модели ветвящейся пористой среды (Л.М.Письмен, 1973), являющейся обобщением известной модели пористой среды В.С.Маркина (1966 г.), предполагается, что каждый капилляр с радиусом критического может ветвиться на малом отрезке длины на несколько надкритических с вероятностями $P_{z1}, P_{z2}, \dots, P_{zn}$ (где P_{z1} — вероятность разветвиться на l пор) или же исчезать с вероятностью λ . Если известна доля макропор

γ (аналог P), то для такой среды удается найти долю заполненных макропор — $\beta : \beta = 1 - q^2$, где q — наименьший положительный корень уравнения $q = f(q)$.

Значение $f(t)$ задается через производящие функции по формуле

$$f(t) = (\lambda + \sum_{l=1}^N P_{zl} t^{(z_l-1)}) / (\lambda + \sum_{l=1}^N P_{zl}). \quad (7)$$

Критическое значение P_c , равное критической доле надкритических пор, задается при этом уравнением

$$P_c = \left[\sum_{l=1}^N (z_l - 1) P_{zl} \right]^{-1}. \quad (8)$$

Из выражения (8), в частности, следует, что если пора ветвится только на две ($N = 1, z_1 = 3$), то $P_c = 0,5$, а если только на три ($N = 1, z_1 = 4$), то $P_c = \frac{1}{3}$. В общем случае, чем разветвленнее пористая среда, тем меньше P_c . Для двух указанных простых частных случаев задания N и z_i выражения для q удается получить в аналитическом виде. Для $N = 1, z_1 = 3, P_{z1} = \nu$

получаем: $q = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2$ при $\frac{\lambda}{\nu} \leq 1$. Аналогично при $N = 1, z_1 = 4, P_{z1} = 3$ спра-
ведливо: $q = \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2} - 1$ при $(\lambda/\nu) \leq 2$. Если требуемые неравенст-
ва не выполнены, то $q = 1$.

Для более сложных случаев удается получить приближенные соотношения и двусторонние неравенства для q . Заметим, что отношение (λ/ν) можно заменить на $(1-\gamma)/\gamma$, ибо $\gamma = \nu/(\lambda + \nu)$. Если эти выражения справедливы во всем диапазоне изменения $(P - P_c)$ или γ , то степенное уравнение для сопротивления справедливо лишь при $(P - P_c) \ll 1$. Для больших $(P - P_c)$ или же при менее резкой изменчивости проводимостей капилляров обычно применяют приближение эффективной среды, имеющие вид трансцендентного уравнения относительно эффективной проводимости

$$\int_0^{\infty} [(\bar{\sigma} - \sigma(r)) / (2 \cdot \sigma(r) + (z - 2) \bar{\sigma})] \cdot 2f(r) dr = 0,$$

где $\sigma(r)$ — проводимость капилляра радиуса r . Аналитическая оценка точности этого уравнения приведена в работе [2], а численные эксперименты доказали его работоспособность при малых контрастностях $\sigma(r)$. Для ступенчатого закона изменения $\sigma(r)$ типа 0 или 1, отвечающего схемам теории перколяции, мы получаем $z \cdot P_c = 2$ (т.е. это уравнение хорошо

применимо к плоским решеткам даже при $P \approx P_c$ и хуже к трехмерным).

Если необходимо найти значение диффузионно-адсорбционных потенциалов решетки по значениям отдельных капилляров, то в этом же приближении можно получить

$$\int_0^{\infty} [(E_{\text{ДА}} - E(r)) \sigma(r)] / [2 \cdot \sigma(r) + (z-2) \bar{\sigma}] \cdot \sigma(r) \cdot f(r) dr = 0.$$

Заметим, что если радиусы всех капилляров совпадают и $z = 2$, то мы приходим к уравнениям для одиночного капилляра.

4. Физические свойства решетки капилляров. Методы теории перколяции и эффективной среды быстро привлекли внимание отечественных петрофизиков [1, 2, 4], и в настоящее время интенсивно изучаются различные направления использования этих методов. Рассмотрим применение этих методов к расчету остаточной водонасыщенности горных пород. Пусть пористая среда устроена так, что поровые каналы, имеющие радиус, меньший r_k (подкритические), заполнены одной фазой, а больший r_k (надкритические) — могут быть заполнены и другой.

Пусть заблокированные микропорами надкритические (макропоры) с вероятностью η насыщены так же, как и макропоры, а неблокированные содержат долю остаточной воды, равную K^{min} . Тогда уравнение для $K_{\text{во}}$ приобретает вид: $K_{\text{во}} = 1 - \gamma [\beta (1 - K_{\text{во}}^{\text{min}}) + (1 - \beta) \eta]$.

Здесь коэффициент η заключен между $(1 - K_{\text{во}})$ и 1 и может возрастать (согласно данным М.М. Элланского [5] линейно по мере приближения к зоне предельного нефтегазонасыщения). Значения β могут быть вычислены по приведенным выше уравнениям, а γ получено по уравнению

$$\gamma = 1 - \left(\sum_{i=1}^N K_{\text{пц}_i} K_{\text{ц}_i} \right) / K_{\text{п}},$$

где $K_{\text{пц}_i}$ и $K_{\text{ц}_i}$ — пористость цемента i -го типа и его объемное содержание. Применение подобных схем расчета предполагает, что задача расчета $K_{\text{во}}$ рассматривается упрощенно без учета кинетики капиллярной пропитки и создаваемых при этом локальных градиентов давлений.

Перейдем теперь к расчету проводимости и проницаемости для решетки капилляров. Поскольку в области, далекой от порога перколяции P_c при не очень больших контрастностях проводимостей асимптотики, уравнения для $\bar{\sigma}$ и уравнения непрерывного смешения [2] совпадают, то его можно заменить на уравнение непрерывного смешения, имеющее то преимущество, что оно разрешимо в явном виде

$$\bar{\sigma} = \left[\sum_{i=1}^N V_i \sigma_i^{(z-4)/z} \right]^{z/(z-4)} \quad \text{для } z \neq 4.$$

Последнее уравнение применимо для расчета проводимости $\bar{\sigma}$ (при $\sigma_i \sim r_i^2$) и проницаемости $K_{\text{пр}}$ (при $\sigma_i \sim r_i^4$). Через r_i обозначен радиус капилляра.

Введем обозначения $g = \frac{z-4}{z}$, $\Lambda(r) = \frac{\pi r^\gamma \varsigma}{\beta}$, $a(r)$ — плотность распределения объемов пор по их радиусам, β — извилистость. Тогда легко получить уравнение, пригодное для расчета проводимости $\Lambda = \sigma$ (при $\gamma = 2$ и $\varsigma = \sigma_0$) и проницаемости $\bar{\Lambda} = K_{\text{пр}}$ (при $\gamma = 4$ и $\varsigma = \frac{1}{8}$).

$$\bar{\Lambda} = \frac{K_{\text{п}} \psi \varsigma}{\pi \beta} \left[\int_0^{\infty} \left(\frac{\pi r^\gamma}{\beta} \right)^g \frac{a(r) dr}{r^2} \right]^{(1/g)} \quad (9)$$

где ψ — доля пор в данном направлении. Заметим, что из выражения (9) при $\gamma = 4$ и $\varsigma = 1/8$, задавая $g = -1$ и $g = 1$, получаем левую и правую части неравенства (4). При рассмотрении этого перехода надо учесть отличие $a(r)$ от фигурирующего в неравенстве (4) $f(r)$. Интересно отметить, что коэффициент g , согласно примененным при выводе выражения (9) представлениям, тесно связан с z и с $K_{\text{во}}$, что открывает интересные пути совместного анализа данных о $K_{\text{пр}}$, P_n и $K_{\text{во}}$. Заметим, что при $\gamma = 4$, $g = 1$, $\psi = 1/3$ и $a(r) = n \exp\left(\frac{-\ln^2(r/R)}{28^2}\right)$ получаем для $K_{\text{пр}}$ известный аналитический результат:

$$K_{\text{пр}} = K_{\text{пэфф}} \cdot R^2 \cdot \exp(8\delta^2) / 24\beta$$

Проводимость решетки $\bar{\sigma}$ в этом случае ($g = 1$) не зависит от вида распределения пор и равна $K_{\text{пэфф}} \sigma_0 / (8\beta)$. В этом случае

$$K_{\text{пр}} = R^2 \exp(8a^2) / P_n.$$

В общем же случае из выражения (9) и из теоремы о среднем следует:

$$K_{\text{пр}} = \frac{r_0^2}{P_n}, \quad \text{где } r_0 \text{ — некоторое значение радиуса пор в диапазоне области}$$

определения плотности распределения пор по радиусу. Соотношения этого типа, как известно, многократно проверялись экспериментально.

Более общие соотношения, в том числе получаемые в рамках введенной нами модели с глинистой обкладкой стенок пор, а также основанные на использовании уравнения для диффузионно-адсорбционной активности позволяют учесть эффект глинистости, но имеют громоздкий вид и не могут быть рассмотрены в рамках данной публикации.

Литература

1. Еникеев Б.Н., Кашик А.С., Чуринова И.М. Системный подход к задаче оценки свойств пласта по данным каротажа (модели и методы). — М.: ВНИИОЭНГ, 1980 (Обзорная информация).
2. Еникеев Б.Н., Еникеева С.Н. О некоторых функциональных соотношениях применяемых в петрофизике. — В кн.: Математические методы описания горных пород и расчета их эффективных свойств. — М.: Наука, 1986.
3. Зак С.А., Миневич Е.Д., Чен Син Э.Н. Оценка снижения проницаемости в процессах коагуляции пористой среды. — В кн.: Интенсификация добычи нефти. — М.: Недра, 1983.
4. Пирвердян А.М. Физика и гидравлика нефтяного пласта. — М.: Недра, 1982.
5. Элланский М.М. Оценка подсчетных параметров залежей нефти и газа с помощью ЭВМ. — М.: ВНИИОЭНГ, 1985 (Обзорная информация).